

О ВОЛНОВОЙ СТРУКТУРЕ ВБЛИЗИ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЗАРЯДА В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ПЛЕНКИ

А. А. Черницкий^{1,2,*}

¹ Научно-образовательный центр физико-математических наук и цифровых технологий Санкт-Петербургского государственного химико-фармацевтического университета Министерства здравоохранения РФ, Санкт-Петербург, 197022, Россия

² Лаборатория теоретической физики им. А. А. Фридмана, Санкт-Петербург, Россия

В рамках нелинейной полевой модели экстремальной пространственно-временной пленки рассматривается ее линейризация на фоне сфероидального солитона, или сферона, представляющего элементарный электрический заряд. Получены представление системы уравнений первого порядка для пространственно-временной пленки в виде одного уравнения в гиперкомплексной форме и его линейризация на фоне сферона. Задача нахождения слабых волновых мод на фоне сферона сведена к решению дифференциального уравнения второго порядка. Решение ищется разложением в асимптотический ряд по обратным степеням радиуса сферической системы координат. Получена рекуррентная формула для ряда. Посредством численных экспериментов с частичными суммами ряда показана возможность существования дискретного спектра частот волновых мод. Обсуждается возможность представления заряженных элементарных частиц солитонными решениями, содержащими элементарный заряд и волновые моды.

Within the framework of the nonlinear field model of the extreme space-time film, its linearization is considered against the background of a spheroidal soliton or spheron, representing an elementary electric charge. The representation of the system of first-order equations for the space-time film in the form of a single equation in hypercomplex form and its linearization against the background of a spheron are obtained. The problem of finding weak wave modes against the background of a spheron is reduced to solving a second-order differential equation. The solution is sought by expansion in an asymptotic series in the inverse powers of the radius of the spherical coordinate system. A recurrent formula for the series is obtained. By means of numerical experiments with partial sums of the series, the possibility of existence of a discrete spectrum of frequencies of wave modes is shown. The possibility of representation of charged elementary particles by soliton solutions containing an elementary charge and wave modes is discussed.

PACS: 12.10.-g; 12.60.-i; 12.90.+b

* E-mail: AAChernitskii@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Полевая модель пространственно-временной пленки (ПВП) [1] рассматривается в качестве единой нелинейной полевой модели. Можно сказать, что эта модель является упрощением известного нелинейного обобщения электродинамики Борна–Инфельда [2, 3].

В модели ПВП найдено решение, соответствующее элементарному электрическому заряду [4] и представляющее собой «голый» электрон.

Естественно предположить, что в нелинейной модели это решение может являться своего рода резонатором для волновых мод.

Настоящая работа посвящена нахождению волновых мод вблизи элементарного заряда в модели ПВП в линейном приближении.

ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

Запишем модель ПВП [1] в виде системы первого порядка для четырехвектора $\{\Upsilon^\mu\}$, который называем дуальным вектором ПВП. При этом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\Upsilon_\mu}{\mathcal{L}'}, \quad \mathcal{L}' \doteq \sqrt{|1 - \chi^2 \Upsilon \Upsilon|}, \quad \Upsilon \Upsilon \doteq m^{\mu\nu} \Upsilon_\mu \Upsilon_\nu, \quad (1)$$

где $m^{\mu\nu}$ — метрический тензор; $\Phi(\{x^\mu\})$ — полевая функция ПВП.

Система уравнений для $\{\Upsilon_\mu\}$ (при $1 - \chi^2 \Upsilon \Upsilon > 0$) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{|m|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{|m|} m^{\mu\nu} \Upsilon_\nu = 0, \quad (2a)$$

$$\left(\frac{\partial \Upsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Upsilon_\nu}{\partial x^\mu} \right) (1 - \chi^2 \Upsilon \Upsilon) - \chi^2 \left(\Upsilon_\mu \frac{\partial \Upsilon \Upsilon}{\partial x^\nu} - \Upsilon_\nu \frac{\partial \Upsilon \Upsilon}{\partial x^\mu} \right) = 0. \quad (2b)$$

Она же в системе гиперкомплексных чисел в алгебре Клиффорда [3, 5]:

$$\partial \Upsilon = \chi^2 \left(\Upsilon \partial \wedge \Upsilon + \frac{1}{2} \Upsilon \wedge (\partial \Upsilon \Upsilon) \right), \quad (3)$$

где $\Upsilon = \Upsilon_\mu \mathbf{b}^\mu$, $\{\mathbf{b}^\mu\}$ — базисные векторы произвольной системы координат; $\partial \doteq \mathbf{b}^\mu (\partial / \partial x^\mu)$ — вектор градиента; \wedge — антисимметричное произведение.

Введем дуальный кватернион поля ПВП по формуле

$$\bar{\Upsilon} \doteq \mathbf{b}_0 \Upsilon = \Upsilon_0 + \mathbf{b}_0 \mathbf{b}^i \Upsilon_i = \Upsilon_0 + \mathbf{b} \mathbf{b}^i \Upsilon_i, \quad (4)$$

где $\{\mathbf{b} \mathbf{b}^i\}$ — первые три базисных бивектора (из шести), последнее равенство справедливо для инерциальных систем координат.

Из (3) и (4) получаем уравнение для дуального кватерниона поля ПВП:

$$\bar{\partial} \bar{\Upsilon} = \chi^2 \left(\Upsilon \bar{\partial} \bar{\wedge} \bar{\Upsilon} - \frac{1}{2} (\bar{\partial} \Upsilon \Upsilon) \bar{\wedge} \bar{\Upsilon} \right), \quad (5)$$

где $\bar{\partial} \doteq -(\partial/\partial x^0) + \mathbf{b}\mathbf{b}^i(\partial/\partial x^i)$ — кватернион градиента; $\bar{\Lambda}$ — антисимметричное произведение с пространственной инверсией (\ddagger), изменяющей везде направления трех пространственных базисных векторов на противоположные ($\mathbf{b}_i \rightarrow -\mathbf{b}_i$): $\mathbf{C}_1 \bar{\Lambda} \mathbf{C}_2 \doteq (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 - \ddagger \mathbf{C}_2 \ddagger \mathbf{C}_1)/2$.

СФЕРОН

Сферон — это сфероидальный солитон [4]. Он представляет собой статическое решение в собственных сферических координатах.

Дуальный кватернион поля ПВП для сферона с зарядом \bar{q} имеет вид

$$\bar{\Upsilon} = \bar{\Upsilon}^\circ \doteq \frac{\bar{q}}{r^2} \mathbf{b}\mathbf{b}_r, \quad (6)$$

где $\mathbf{b}\mathbf{b}_r$ — радиальный базисный бивектор.

Его сингулярная сферическая поверхность $r = \bar{r} \doteq \sqrt{|\bar{q}\chi|}$ определяется равенством (см. (1))

$$1 - \chi^2 \Upsilon\Upsilon = 0. \quad (7)$$

Внутри этой поверхности поле полагается постоянным.

Посредством преобразования Лоренца статическое сферонное решение преобразуется в движущийся солитон.

СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Уравнение ПВП в пределе слабого поля Φ переходит в обычное скалярное волновое уравнение

$$\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{(\partial x^0)^2} = 0. \quad (8)$$

Его элементарные решения в сферических координатах $\{r, \vartheta, \varphi\}$

$$\mathbf{h}_l(kr) \mathbf{P}_l^m(\cos\vartheta) e^{i(m\varphi - \omega x^0)}, \quad \mathbf{h}_l^*(kr) \mathbf{P}_l^m(\cos\vartheta) e^{-i(m\varphi - \omega x^0)}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{h}_l \doteq \mathbf{j}_l + i\mathbf{y}_l, \quad \mathbf{h}_l^* \doteq \mathbf{j}_l - i\mathbf{y}_l, \quad k^2 = \omega^2, \quad (9b)$$

где k — волновое число сферической волны; \mathbf{h}_l и \mathbf{h}_l^* — сферические функции Ханкеля; \mathbf{j}_l и \mathbf{y}_l — сферические функции Бесселя.

Из элементарных комплексных волновых мод можно составить действительные волновые моды, среди которых имеются спиральные и кольцевые. Кольцевые сферические волновые моды формируются суммой

$$\Phi = \mathbf{P}_l^m(\cos\vartheta) \mathbf{j}_l(kr) \cos(m\varphi - \omega x^0). \quad (10)$$

Они представляют собой стоячие волны в радиальном направлении и могут вращаться относительно оси $\vartheta = 0 \cup \vartheta = \pi$.

Асимптотика решений (9) при $r \rightarrow \infty$ приводит к расходимости энергии на бесконечности. Поскольку в пределе слабого поля уравнение ПВП переходит в линейное волновое уравнение, такой же асимптотикой могут обладать и частицы-солитоны. Однако это не будет являться трудностью модели, если предположить наличие в межчастичном пространстве волнового фона. Энергия волнового фона конечна, но очень велика. Волновое поле солитона как бы растворяется в этом волновом фоне.

В работе [5] (см. также монографию [3]) были введены гиперкомплексные угловые сферические функции $C_j^{lm} = C_j^{lm}(\vartheta, \varphi)$. Через них выражаются элементарные решения линеаризованного уравнения (5) (без правой части) в сферических координатах:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \left(\bar{\Upsilon}_s^{lm} C_s^{lm} + \bar{\Upsilon}_{-1}^{lm} C_{-1}^{lm} + \bar{\Upsilon}_0^{lm} C_0^{lm} + \bar{\Upsilon}_1^{lm} C_1^{lm} \right) e^{-i\omega x^0}, \quad (11)$$

где $\bar{\Upsilon}_j^{lm} = \bar{\Upsilon}_j^{lm}(r)$ — гиперскалярные функции радиальной координаты, выражающиеся через сферические функции Ханкеля (9б) с заменой в них мнимой единицы i на гипермнимую \mathbf{i} *

Здесь, так же как и в случае скалярных волн, можно выделить спиральные и кольцевые кватернионные сферические волны.

ВОЛНОВЫЕ МОДЫ СФЕРОНА

Рассмотрим полевую конфигурацию дуального кватерниона ПВП в виде суммы сферона $\bar{\mathbf{Y}}^\circ$ (6) и слабой волновой моды $\bar{\mathbf{Y}}'$: $\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Y}}^\circ + \bar{\mathbf{Y}}'$. Подстановка ее в уравнение (5) и линеаризация по $\bar{\mathbf{Y}}'$ дает уравнение

$$\overline{\partial \mathbf{Y}'} = \mathcal{N}'(\bar{\mathbf{Y}}^\circ) \bar{\mathbf{Y}}', \quad (12)$$

где $\mathcal{N}'(\bar{\mathbf{Y}}^\circ)$ обозначает слабую производную (Гато) от нелинейного оператора правой части уравнения (5) при $\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Y}}^\circ$.

Рассмотрим волновую моду $\bar{\mathbf{Y}}'$ специального вида

$$\Re \left(\left(\mathbf{i} f_0 \left(\omega C_s^{lm} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2} (C_1^{lm} + C_{-1}^{lm}) \right) + f_1 C_0^{lm} \right) \omega^{-l-2} e^{-i\omega x^0} \right), \quad (13)$$

где $f_0 = f_0(r)$ и $f_1 = f_1(r)$ — неизвестные гиперскалярные (не содержат векторов и бивекторов) и гипердействительные (не содержат гипермнимой единицы \mathbf{i}) функции радиальной переменной; \Re — гипердействительная часть гиперкомплексного числа [3].

* Гипермнимая единица \mathbf{i} представляет собой единичный антисимметричный тензор четвертого ранга, или псевдоскаляр. Она выражается через произведение четырех базисных векторов $\{\mathbf{b}^\mu\}$, а в матричном представлении — через произведение четырех матриц Дирака [3].

Волновая мода (13) представляет собой кольцевую вращающуюся волну. Причем при $f_0 = j_l$ и $f_1 = f'_0$ она является кватернионным градиентом соответствующей волновой моды линейного волнового уравнения (8) и обращает в ноль левую часть уравнения (5).

Подстановка (13) в (12) приводит к системе уравнений первого порядка для f_0 и f_1 , которая дает уравнение второго порядка для f_0 . Переходя к новой независимой переменной $\tilde{r} \doteq \omega r$, получаем

$$\left(1 - \frac{\tilde{r}^4}{\tilde{r}^4}\right) \tilde{f}_0'' + \frac{2}{\tilde{r}} \tilde{f}_0' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2} + \frac{6\tilde{r}^4}{\tilde{r}^6}\right) \tilde{f}_0 = 0, \quad (14)$$

где $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_0(\tilde{r}) = f_0(r)$, $\tilde{r} \doteq \omega \bar{r} = \omega \sqrt{|q\chi|}$.

При $\tilde{r} = 0$ уравнение (14) переходит в хорошо известное уравнение с решениями в виде функций Бесселя или Ханкеля (см. (9)).

Сферическая функция Ханкеля первого рода выражается формулой

$$h_l(z) = \frac{e^{iz}}{i^{l+1}z} \sum_{l'=0}^l \frac{(l+l')!}{(l-l')!l!} (-2iz)^{-l'}. \quad (15)$$

Будем искать частное решение уравнения (14) для функции $\tilde{f}_0(\tilde{r})$ в виде

$$\tilde{f}_0 = \tilde{P}(\tilde{r}) \frac{e^{i\tilde{r}}}{\tilde{r}}, \quad (16)$$

где $\tilde{P}(\tilde{r})$ — ряд по обратным степеням переменной \tilde{r} .

Подстановка (16) в (14) дает рекуррентную формулу:

$$\tilde{P}(\tilde{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{r}^{-n}, \quad (17a)$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{i}{2} l(l+1), \quad a_2 = -\frac{1}{8} (l-1)l(l+1)(l+2),$$

$$a_3 = -\frac{i}{48} (l-2)(l-1)l(l+1)(l+2)(l+3) - \frac{i}{6} \tilde{r}^4,$$

$$a_4 = \frac{1}{384} (l-3)(l-2)(l-1)l(l+1)(l+2)(l+3)(l+4) + \frac{1}{12} l(l+1) \tilde{r}^4, \quad (17b)$$

$$a_n = \frac{1}{2n} \left(i(l+1-n)(n+l)a_{n-1} - \tilde{r}^4 \left(i a_{n-3} - 2(n-3)a_{n-4} - \right. \right. \\ \left. \left. - i(n-1)(n-6)a_{n-5} \right) \right) \quad \text{при } n \geq 5.$$

Для $\tilde{r} = 0$ формула (17б) дает ряд (17а), обрывающийся на члене с номером $n = l$. При этом решение (16) с получающейся конечной суммой $\tilde{P}(\tilde{r})$ соответствует сферической функции Ханкеля (15).

С частичными суммами, построенными с помощью рекуррентной формулы (17б), производились численные эксперименты. Исследовалась тенденция сходимости квадрата модуля комплексных частичных сумм на сфере $\tilde{r} = \tilde{r}$ ($r = \bar{r}$) в зависимости от значений параметра $\tilde{r} = \bar{r}\omega$.

На рис. 1 показана зависимость $|\tilde{P}(\tilde{r})|^2$ для частичной суммы 24-го порядка при $l = 1$. Имеется первый острый минимум со значением $|\tilde{P}(\tilde{r})|^2 \approx 1$ при $\tilde{r} \approx 3,7824$. Еще два минимума этой частичной суммы, которые видны на рис. 1, а, не имеют такого острого характера.

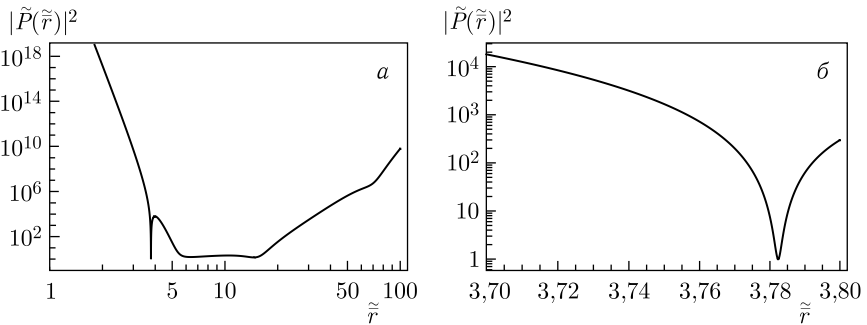


Рис. 1. Зависимость квадрата модуля функции $\tilde{P}(\tilde{r})$ на сфере $\tilde{r} = \tilde{r}$ ($r = \bar{r}$) от параметра \tilde{r} для частичной суммы 24-го порядка при $l = 1$

При увеличении порядка частичной суммы до 40 появляются два дополнительных острых минимума. При этом значение параметра \tilde{r} для первого минимума близко к соответствующему значению для частичной суммы 24-го порядка. Однако нахождение точных значений параметра \tilde{r} для минимумов при больших порядках частичной суммы сталкивается со сложностями, связанными с ограниченной точностью компьютерных вычислений.

Результаты данных численных экспериментов могут свидетельствовать о наличии дискретного спектра разрешенных значений параметра $\tilde{r} = \omega \sqrt{|\bar{q}\chi|}$ или дискретного спектра частот волновых мод, для которых ряд (17а) имеет необходимую область сходимости.

Как указано выше, сингулярная поверхность решения определяется условием (7). Волновая добавка к сферону естественно деформирует эту сингулярную поверхность и делает ее динамической. Если рассматривать истинный солитон, а не только приближение слабой волновой моды, то нельзя исключать и изменение топологии этой поверхности, например превращение ее в квазитороидальную.

Тороидальная модель лептонов в рамках теории пространственно-временной пленки рассматривалась, в частности, в работе [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Скалярная модель единого поля пространственно-временной пленки представляется предпочтительной по сравнению с более сложными моделями векторных и тензорных полей.

Наиболее подходящим для поиска солитонных решений, соответствующих заряженным элементарным частицам, является гиперкомплексное уравнение для дуального кватерниона поля.

В настоящей работе получены:

- уравнение первого порядка в гиперкомплексной форме для дуально-кватерниона поля ПВП;
- линеаризованное уравнение вблизи сферона для слабой волновой моды;
- система уравнений первого порядка для двух радиальных функций кольцевой волновой моды и уравнение второго порядка для одной из функций;
- рекуррентные соотношения для коэффициентов асимптотического ряда, представляющего решение этого уравнения;
- а также произведены численные компьютерные эксперименты, указывающие на возможность наличия дискретного спектра частот слабых волновых мод сферона.

Дискретный спектр собственных частот солитонных решений единой полевой модели должен соответствовать спектру масс наблюдаемых элементарных частиц. Однако рассмотренное здесь линейное приближение для слабых волновых мод вблизи элементарного заряда может быть недостаточным для получения правильных значений частот этого спектра. Следующие приближения в смысле некоторой итерационной процедуры могут существенно изменять и собственные частоты.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chernitskii A. A.* Lightlike Shell Solitons of Extremal Space-Time Film // *J. Phys. Commun.* 2018. V. 2. P. 105013.
2. *Chernitskii A. A.* Born–Infeld Equations // *Encyclopedia of Nonlinear Science* / Ed. A. Scott. New York; London: Routledge, 2005. P. 67–69.
3. *Черницкий А. А.* Нелинейная электродинамика: сингулярные солитоны и их взаимодействия. СПб: ИНЖЭКОН, 2012. 360 с.
4. *Chernitskii A. A.* About Long-Range Interaction of Spheroidal Solitons in Scalar Field Nonlinear Model // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 938, No. 1. P. 012029.
5. *Chernitskii A. A.* Basic Systems of Orthogonal Functions for Space-Time Multivectors // *Adv. Appl. Clifford Algebras.* 2005. V. 15, No. 1. P. 27–53.
6. *Черницкий А. А.* О лептонах в теории пространственно-временной пленки // *ЭЧАЯ.* 2023. Т. 54, вып. 4. С. 824–838.